

DOI: 10.16285/j.rsm.2021.2089

基于罚函数偶应力理论的土体应变局部化研究

王冬勇¹, 陈 曦², 王方宇¹, 彭丽云¹, 齐吉琳¹

(1. 北京建筑大学 土木与交通工程学院, 北京 102616; 2. 北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘 要: 与 Cosserat 理论相比, 偶应力理论在一定程度上可以降低数值框架的复杂度, 已逐渐应用于岩土体应变局部化分析中。然而, 一般的偶应力有限元法需要满足 C^1 连续性, 即单元内部和单元交界面上的应变都需要具有连续性。为了避免开发较为复杂的 C^1 型偶应力单元, 在 Cosserat 连续体理论框架下, 通过借助罚函数方法对 C^1 连续性进行松弛来获得偶应力理论的逼近解, 建立了基于罚函数的偶应力有限元方法 PCS-FEM。通过平面应变条件下的弹性圆孔应力集中问题对 PCS-FEM 方法的有效性进行了验证, 并应用于土体应变局部化分析中。通过对 Ottawa 砂的平面应变试验进行数值模拟, 发现 PCS-FEM 方法获得的应力-应变曲线及剪切带破坏形态与试验结果基本一致, 且能够克服经典连续体理论病态的网格敏感性问题, 保证应变局部化问题的适定性; 通过对承受偏心荷载作用下的土坡应变局部化经典算例进行分析, 发现 PCS-FEM 方法同样可以克服土坡应变软化阶段的网格敏感性问题, 展现土体的渐进破坏过程。

关 键 词: Cosserat 理论; 偶应力理论; 罚函数; 内部特征长度; 应变局部化

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2022) 增刊 2-0533-08

Analysis of geotechnical strain localization based on penalty-based couple stress theory

WANG Dong-yong¹, CHEN Xi², WANG Fang-yu¹, PENG Li-yun¹, QI Ji-lin¹

(1. School of Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 102616, China;

2. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Compared with the Cosserat theory, the complexity of the numerical framework can be reduced in the couple stress theory to some extent, and it has been gradually applied to the geotechnical strain localization analysis. However, the C^1 continuity should be satisfied in the straight-forward couple stress finite element method, that is, the continuity of the strain inside the elements and on the interface of the elements should be satisfied. To avoid developing more complicated C^1 couple stress elements, within the framework of Cosserat continuum theory, the approximate solution of the couple stress theory can be obtained by relaxing the C^1 continuity with the aid of the penalty function method, and the penalty-based couple stress finite element method (named PCS-FEM) is developed. The effectiveness of the PCS-FEM is verified by the stress concentration problem of an elastic circular hole under plane strain condition, and it is further applied to the strain localization analysis of soil mass. Based on the numerical simulation of the plane strain experiment of Ottawa sand, it is found that the stress-strain curve and the failure form of shear band obtained by the PCS-FEM method are basically consistent with the test results, and the ill-conditioned mesh sensitivity problem of the classical continuum theory can be avoided by the PCS-FEM so that the well-posedness of the strain localization problem can be ensured. Based on the strain localization analysis of the soil slope subject to the eccentric load, it is found that the mesh sensitivity problem in the strain-softening stage of the soil slope can also be avoided, and the progressive failure process of the slope can be captured by the PCS-FEM.

Keywords: Cosserat theory; couple stress theory; penalty function; internal characteristic length; strain localization

1 引 言

岩土材料接近破坏时, 通常会形成具有高度集

中的塑性应变带状区域或位移梯度急剧不连续的带状区域, 即表现出应变局部化现象^[1-2]。应变局部化是岩土材料破坏的前兆, 广泛发生于岩土体的渐进

收稿日期: 2021-12-10

修回日期: 2022-02-16

基金项目: 国家自然科学基金 (No.42002277, No.41972279, No.42172299); 国家重点研发计划课题 (No.2021YFF0306302)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (42002277, 41972279, 42172299) and the National Key R&D Program of China (2021YFF0306302).

第一作者简介: 王冬勇, 男, 1990 年生, 博士, 博士后, 主要从事计算岩土力学方面的研究。E-mail: wangdongyong@bucea.edu.cn

通讯作者: 齐吉琳, 男, 1969 年生, 博士, 研究员, 主要从事寒区岩土工程方面的研究。E-mail: jilinqi@bucea.edu.cn

破坏过程中。当利用经典连续体理论处理应变局部化问题时,为了保证数值模拟的适定性,需要引入正则化机制,如梯度塑性理论、非局部理论、黏性效应和 Cosserat 理论等^[3-4]。近年来, Cosserat 理论已经广泛应用于岩土体的应变局部化分析中,可以克服经典连续体理论由于应变软化引起的网格敏感性^[5-8]。相较于经典连续体, Cosserat 理论有两个额外的参数,即内部特征长度 l_c 和 Cosserat 剪切模量 G_c 。对于内部特征长度 l_c ,科研人员结合颗粒材料的细观结构(如颗粒平均粒径,颗粒接触面积及颗粒形状等)给出了一些 l_c 的确定方法并应用于土体应变局部化分析^[9-11];对于 Cosserat 剪切模量 G_c ,参数如何确定目前还没有相对统一的结论,研究者大多采用经典连续体剪切模量的一半作为 Cosserat 剪切模量,即 $G_c = 0.5G$ ^[12-14]。此外,针对特定的岩土材料,也有学者进行了尝试性研究,如余成学等^[15]建议对层状岩体采用 $G_c = 0.714G$ 。

当 Cosserat 理论中的微观转角等于由线位移场确定的宏观转角时, Cosserat 理论退化成约束转动的 Cosserat 理论,也称为偶应力理论^[16-17]。与 Cosserat 理论相比,偶应力理论不需要 G_c 参数,只有额外的内部特征长度 l_c ,在一定程度上可以降低数值框架的复杂度。然而,一般的偶应力有限元方法需要满足 C^1 连续性,即单元内部和单元交界面上的应变都需要具有连续性^[18-20]。为了避免开发较为复杂的 C^1 型偶应力单元,一些研究者借助罚函数方法通过在 C^0 连续性框架基础上对 C^1 连续性进行松弛来获得偶应力理论的逼近解。例如,Adachi^[21]和肖其林^[22]等将罚函数法引入到偶应力理论,通过平面应变条件下的弹性圆孔应力集中问题对其有效性和适用性进行了验证。目前,基于罚函数的偶应力有限元法大多应用于弹性应力集中问题,针对土体应变局部化的应用研究相对较少。

本文在 Cosserat 连续体框架基础上,从应变能的角度出发推导了平面应变条件下 Cosserat 理论与罚函数偶应力理论之间的关系,建立了基于罚函数的偶应力有限元法 (penalty-based couple stress finite element method, PCS-FEM)。通过平面应变条件下的弹性圆孔应力集中问题对 PCS-FEM 方法的有效性进行验证,并应用于土体应变局部化分析中。

2 基于罚函数的偶应力理论

2.1 Cosserat 理论

在 Cosserat 理论中,体内每一点除位移自由度 u_x 和 u_y 外,还引入了独立的转动自由度,即

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, w_z]^T \quad (1)$$

除 Cauchy 应力和应变外,还产生了偶应力 (m_{xz} 、 m_{yz}) 和微曲率 (χ_{xz} 、 χ_{yz}),其应力和应变矢量分别为

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, m_{xz}, m_{yz}]^T \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, \chi_{xz}, \chi_{yz}]^T \quad (3)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - w_z, \\ \varepsilon_{yx} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z, \chi_{xz} = \frac{\partial w_z}{\partial x}, \chi_{yz} = \frac{\partial w_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

几何方程表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (5)$$

其中,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

线弹性应力-应变关系可表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

其中,

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{D}_1$ 、 $\mathbf{D}_2$ 、 $\mathbf{D}_3$ 分别为正应力和正应变关系矩阵、剪应力和剪应变关系矩阵、偶应力和微曲率关系矩阵,具体形式如下

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_2 &= \begin{bmatrix} G + G_c & G - G_c \\ G - G_c & G + G_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_3 &= \begin{bmatrix} 4Gl_c^2 & 0 \\ 0 & 4Gl_c^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: λ 和 G 为拉梅常数。

2.2 偶应力理论

在偶应力理论中, 微观转角 w_z 与线位移场确定的宏观转角 φ_z 相等, 即

$$w_z = \varphi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (10)$$

通常将剪应力写成对称分量 τ_s 和非对称分量 τ_a 两部分^[16]:

$$\tau_s = \frac{\tau_{xy} + \tau_{yx}}{2}, \quad \tau_a = \frac{\tau_{xy} - \tau_{yx}}{2} \quad (11)$$

其应力和应变矢量分别表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_s, m_{xz}, m_{yz}]^T \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_s, \chi_{xz}, \chi_{yz}]^T \quad (13)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \gamma_s = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \\ \chi_{xz} &= \frac{\partial w_z}{\partial x}, \chi_{yz} = \frac{\partial w_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

根据式 (10) 可知,

$$\left. \begin{aligned} \chi_{xz} &= \frac{\partial w_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial u_x}{\partial x \partial y} \right) \\ \chi_{yz} &= \frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其几何方程与式 (5) 形式相同, 微分算子矩阵 L 为

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

由于偶应力理论中没有 Cosserat 剪切模量参数, 其弹性本构矩阵退化为

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G \end{bmatrix} \\ D_2 &= [G] \\ D_3 &= \begin{bmatrix} 4Gl_c^2 & 0 \\ 0 & 4Gl_c^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2.3 基于罚函数的偶应力理论

由式 (4) 和式 (9) 可知, Cosserat 理论中的

剪切应变能为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{yx} \varepsilon_{yx}) d\Omega &= \\ \int_{\Omega} [(G - G_c)(\varepsilon_{yx} \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx}) + (G + G_c)(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yx}^2)] d\Omega &= \\ \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 d\Omega + \int_{\Omega} 4G_c \left[w_z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]^2 d\Omega & \quad (18) \end{aligned}$$

由于 Cosserat 理论中的微观转角 w_z 与宏观转角 φ_z 不相等, 式 (18) 可进一步表示为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{yx} \varepsilon_{yx}) d\Omega &= \\ \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 d\Omega + 4G_c \int_{\Omega} (w_z - \varphi_z)^2 d\Omega & \quad (19) \end{aligned}$$

因此, Cosserat 理论的应变能为

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Cos}} &= \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{yx} \varepsilon_{yx} + m_{xz} \chi_{xz} + \\ m_{yz} \chi_{yz}) d\Omega &= \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + m_{xz} \chi_{xz} + m_{yz} \chi_{yz}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 d\Omega + 4G_c \int_{\Omega} (w_z - \varphi_z)^2 d\Omega & \quad (20) \end{aligned}$$

由式 (14) 和式 (17) 可知, 偶应力理论中的剪切应变能为

$$\int_{\Omega} \tau_s \gamma_s d\Omega = \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 d\Omega \quad (21)$$

则偶应力理论的应变能可表示为

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Cou}} &= \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_s \gamma_s + m_{xz} \chi_{xz} + m_{yz} \chi_{yz}) d\Omega = \\ \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + m_{xz} \chi_{xz} + m_{yz} \chi_{yz}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 d\Omega & \quad (22) \end{aligned}$$

由式 (20) 和式 (22) 可知,

$$\Pi_{\text{Cos}} = \Pi_{\text{Cou}} + 4G_c \int_{\Omega} (w_z - \varphi_z)^2 d\Omega \quad (23)$$

可以看出, 若 G_c 是一个由材料性质确定的常数, 则式 (23) 指的是 Cosserat 理论; 若 G_c 是一个随意变化的大数, 用来逼近偶应力的解, 则式 (23) 指的是基于罚函数的偶应力理论, 且平面应变条件下的罚因子为 $4G_c$ 。因此, 在 Cosserat 连续体有限元方法的框架下^[7], 通过给定一个较大的罚因子即可获得偶应力理论的逼近解。理论上讲, 罚因子越

大越接近偶应力理论的真实解；然而，罚因子取值过大会出现数值病态问题^[22]，经过调研，本文选择 20G 作为罚因子可基本满足数值精度的要求。

2.4 方法验证

以平面应变条件下的弹性圆孔应力集中问题为例验证基于罚函数偶应力有限元法 PCS-FEM 的有效性，如图 1 所示。其几何和材料参数分别为：边长 $L = 16.2 \text{ mm}$ ，圆孔半径 $r = 0.216 \text{ mm}$ ，弹性模量 $E = 2 \times 10^5 \text{ kPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。采用对称边界条件，即左边界约束 x 方向位移自由度和转动自由度，下边界约束 y 方向位移自由度和转动自由度， p 和 q 分别为沿 x 和 y 方向上的作用荷载。在有限元离散过程中，使用 8 节点四边形单元，共 5 377 个单元。分别考虑单轴拉伸 ($p = 1 \text{ kPa}$, $q = 0 \text{ kPa}$) 和纯剪状态 ($p = 1 \text{ kPa}$, $q = -1 \text{ kPa}$) 两种工况下偶应力对应力集中因子的影响，其中圆孔顶点 $(0, r)$ 的应力集中因子数值解为 $S_N = \sigma_x/p$ ，并与 Mindlin^[16]给出的两种工况条件下的理论解 S_A 进行对比。

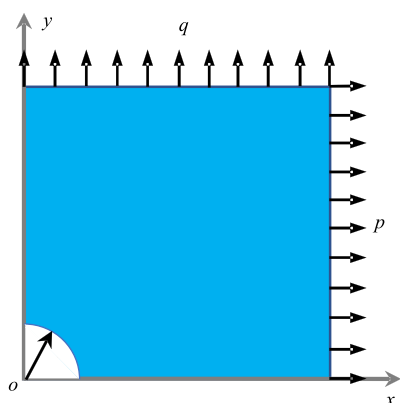


图 1 圆孔应力集中问题的几何和边界条件

Fig.1 Geometry and boundary condition of the stress concentration problem with a circular hole

基于 PCS-FEM 计算获得的应力集中因子如图 2 所示。可以看出，基于 PCS-FEM 计算获得的单轴拉伸 ($p = 1 \text{ kPa}$, $q = 0 \text{ kPa}$) 和纯剪状态 ($p = 1 \text{ kPa}$, $q = -1 \text{ kPa}$) 两种工况下的数值解与 Mindlin 理论解^[16]基本一致，平均相对误差仅 1.1%，可以基本验证 PCS-FEM 方法的有效性。对于该算例，基于经典连续体理论获得的单轴拉伸和纯剪状态条件下的应力集中因子分别为 3.0 和 4.0。当 $r/l_c = 10$ 时，内部特征长度远小于圆孔半径，此时 l_c 对应力集中因子的影响比较小，单轴拉伸和纯剪状态条件下的应力集中因子分别为 2.9 和 3.8，与经典连续体理论获得的结果相差不明显；当 $r/l_c = 1$ 时，内部特征长度与圆孔半径在一个数量级，此时 l_c 对应力集中因子

的影响较为明显，单轴拉伸和纯剪状态条件下的应力集中因子分别为 2.1 和 2.2，与经典连续体理论获得的结果相差较大。

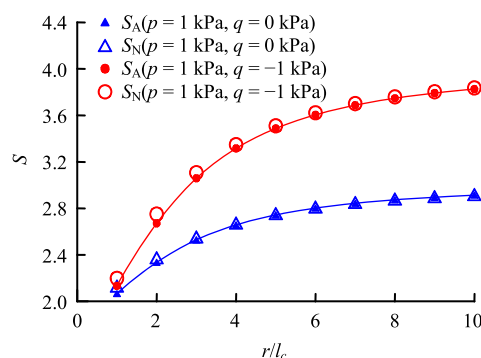


图 2 基于 PCS-FEM 计算获得的应力集中因子
Fig.2 Stress concentration factor obtained by PCS-FEM

3 砂土平面应变试验应变局部化模拟

考虑到平面应变数值试验具有几何简单、方便建模、易于观察等优点^[23-26]，本节以 Alshibli 等^[1, 23]开展的 Ottawa 砂土平面应变试验为例，验证 PCS-FEM 模拟应变局部化问题的可行性。试样几何及边界条件如图 3 所示，试样宽度和高度分别为 80.8 mm 和 152.4 mm。上下边界约束水平方向位移自由度和转动自由度，围压为 100 kPa。针对该平面应变试验，Arslan^[24]及 Chang^[6]等通过数值计算给出了模拟该试验的相关模型参数， $E = 7.2 \times 10^4 \text{ kPa}$ ， $\nu = 0.22$ ，初始黏聚力 $c_0 = 5 \text{ kPa}$ ，初始内摩擦角 $\phi_0 = 40^\circ$ ， $l_c = 0.22 \text{ mm}$ 。采用基于相关联 Drucker-Prager 准则的弹塑性软化模型^[8, 25]，假设强度参数与等效塑性应变满足分段线性关系^[27]，如图 4 所示。为了较好地匹配试验结果， ϵ_{pr} 设置为 0.08，残余黏聚力 c_r

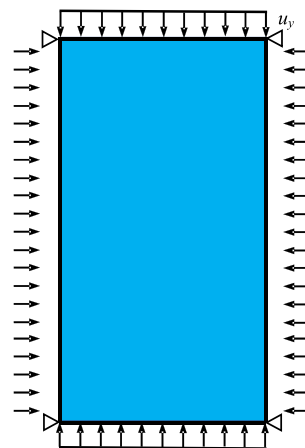


图 3 平面应变试样几何及边界条件
Fig.3 Geometry and boundary conditions of the plane strain specimen

和残余内摩擦角 φ_r 分别为 2 kPa 和 22° 。为探究网格密度对数值结果的影响，求解域划分 3 种网格密度的规则有限元网格，网格密度分别为 20×40 、 40×80 、 56×112 。

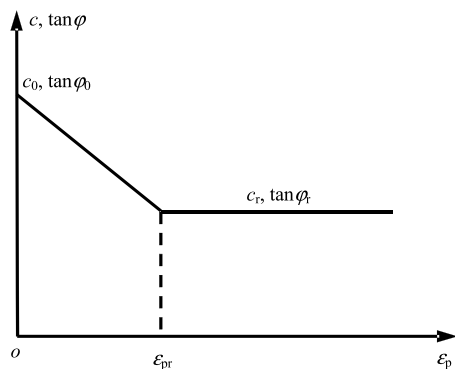


图 4 强度参数变化示意图

Fig.4 Schematic diagram of the variation of the strength parameter

当网格密度为 40×80 时，基于平面应变试验和 PCS-FEM 方法计算获得的应力-应变曲线如图 5 所示，可以看出模拟值与试验结果较为吻合。图 6 分别给出了 Alshibli^[23]平面应变试验、Arslan 等^[24]基

于 Cosserat 理论以及基于 PCS-FEM 方法计算获得的试样破坏形态，可以看出数值模拟的剪切带破坏形态与试验结果基本一致。本文基于偶应力理论获得的剪切带倾角为 53.3° ，与 Alshibli^[23]平面应变试验测定的 53.7° 及 Arslan 等^[24]模拟得到的 54° 大致相同，基本验证了 PCS-FEM 方法模拟应变局部化问题的可行性。此外，为了进一步研究网格密度对数值结果的影响，图 7 给出了利用 PCS-FEM 计算获得的不同网格密度条件下的等效塑性应变，可以

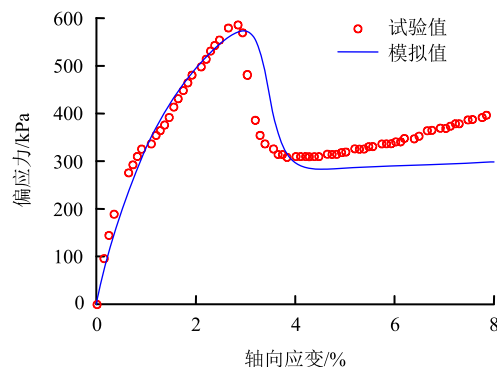
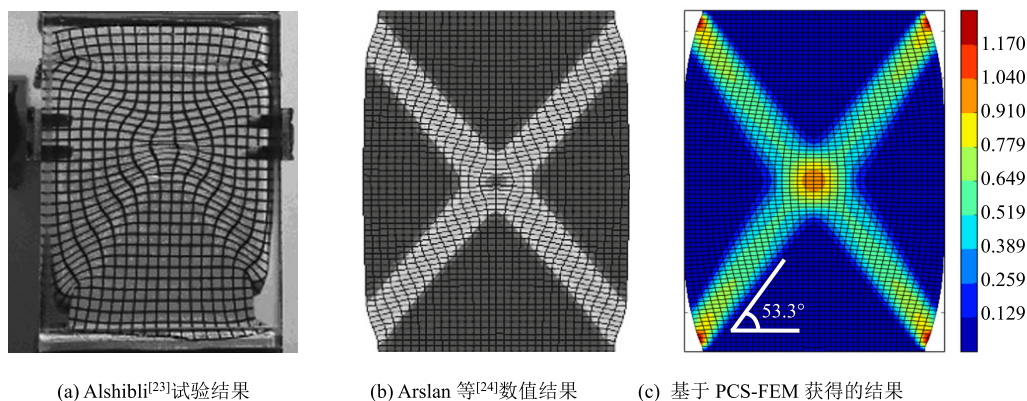


图 5 基于试验和 PCS-FEM 计算获得的应力-应变曲线
Fig.5 Stress-strain curves obtained by experiment and PCS-FEM



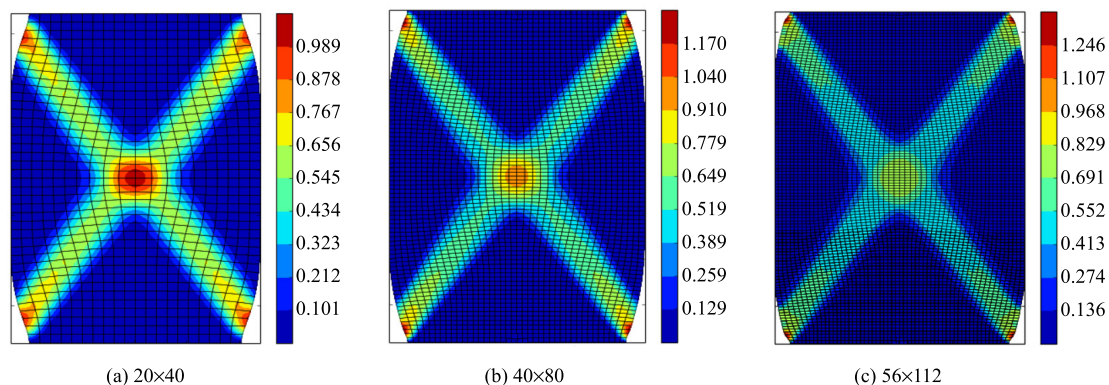
(a) Alshibli^[23]试验结果

(b) Arslan 等^[24]数值结果

(c) 基于 PCS-FEM 获得的结果

图 6 基于试验和数值计算获得的剪切带破坏形态

Fig.6 Shear band based on experiment and numerical simulation



(a) 20×40

(b) 40×80

(c) 56×112

图 7 基于 PCS-FEM 计算获得的等效塑性应变

Fig.7 Equivalent plastic strain obtained by PCS-FEM

看出不同网格密度条件下的剪切带基本一致,说明偶应力理论可以克服经典连续体理论病态的网格敏感性问题的,保证应变局部化问题的适定性。

4 土坡应变局部化分析

为了更好地触发土坡应变局部化现象,一些研究者选择通过刚性条形基础承受偏心载荷的土质边坡来研究边坡的应变局部化问题^[9, 28],如图 8 所示。刚性基础顶面加载节点采用竖向位移增量加载的方式,每步加载 $\Delta u_y = 0.01$ m,共加载 15 步。右边界约束水平方向位移自由度和转动自由度,下边界采用固定边界。采用基于相关联 Drucker-Prager 准则的弹塑性软化模型,材料参数分别为: $E = 1 \times 10^4$ kPa, $\nu = 0.3$, $c_0 = 10$ kPa, 内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$, $l_c = 0.1$ m。本算例只假设黏聚力与等效塑性应变满足分段线性

关系,内摩擦角始终是常数, ε_{pr} 和残余黏聚力 c_r 分别设置为 1.0 和 0.0。为了研究网格密度对数值结果的影响,整个求解域划分 3 种有限元网格,单元数分别为 $nels = 592$ 、2 336、4 840。

基于 FEM 和 PCS-FEM 计算获得的坡顶加载节点的荷载-位移曲线如图 9 所示。可以看出,基于传统 FEM 获得的 3 种网格的荷载-位移曲线具有明显的分歧现象,尤其对于软化程度较高的情况;而基于 PCS-FEM 计算获得的不同网格密度的荷载位移曲线相对较为收敛。当 $u_y = 0.15$ m 时,基于 FEM 和 PCS-FEM 计算获得的不同网格密度条件下的等效塑性应变分别如图 10、11 所示。可明显观察到,基于两种方法获得的破坏形态基本一致。但与传统 FEM 相比,基于 PCS-FEM 方法可以基本克服软化阶段的网格敏感性问题。

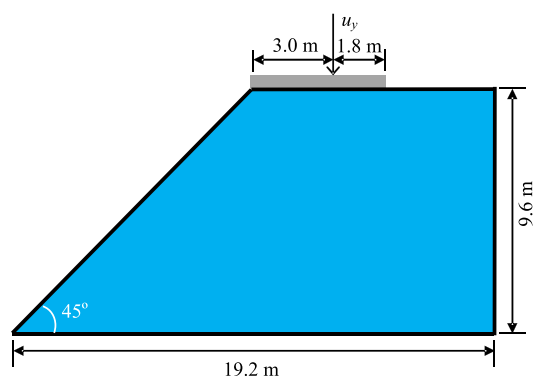


图 8 偏心荷载作用下的土质边坡几何图
Fig.8 Geometry of the soil slope subject to an eccentric load

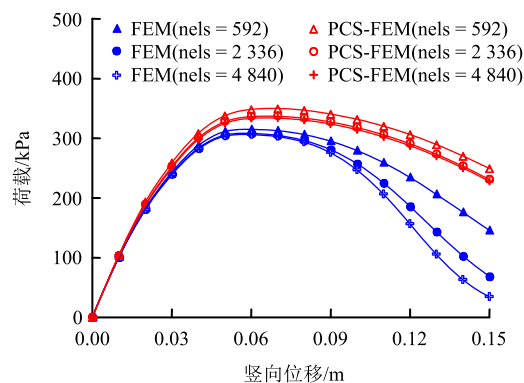


图 9 基于 FEM 和 PCS-FEM 计算获得的荷载-位移曲线
Fig.9 Load-displacement curves obtained by FEM and PCS-FEM

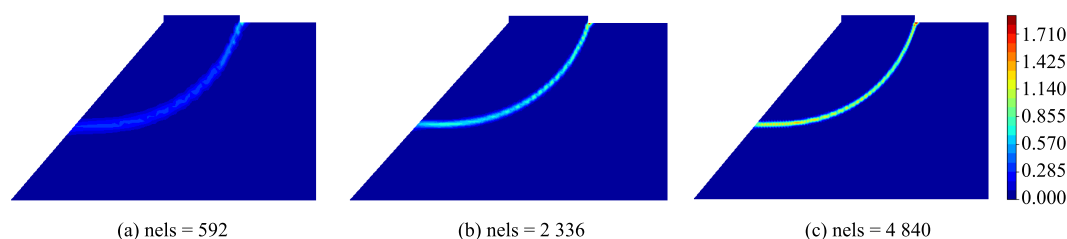


图 10 基于 FEM 计算获得的等效塑性应变
Fig.10 Equivalent plastic strain obtained by FEM

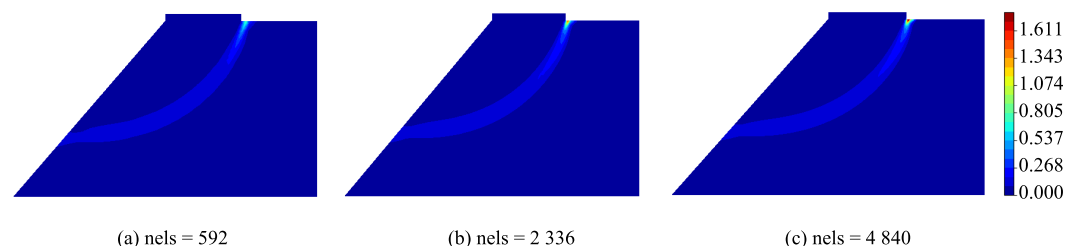


图 11 基于 PCS-FEM 计算获得的等效塑性应变
Fig.11 Equivalent plastic strain obtained by PCS-FEM

为了更加直观地观察该土坡的渐进破坏过程,图 12 给出了基于 PCS-FEM 获得的不同竖向位移条件下的等效塑性应变。在加载初期 ($u_y = 0.01$ m),土体几乎处于弹性阶段,没有产生塑性应变;当加

载到一定程度 ($u_y = 0.05$ m),坡顶开始产生塑性变形;进入软化阶段后 ($u_y = 0.10$ m 或 0.15 m),塑性应变逐渐积累扩大直至塑性区贯通形成完整的滑动面。

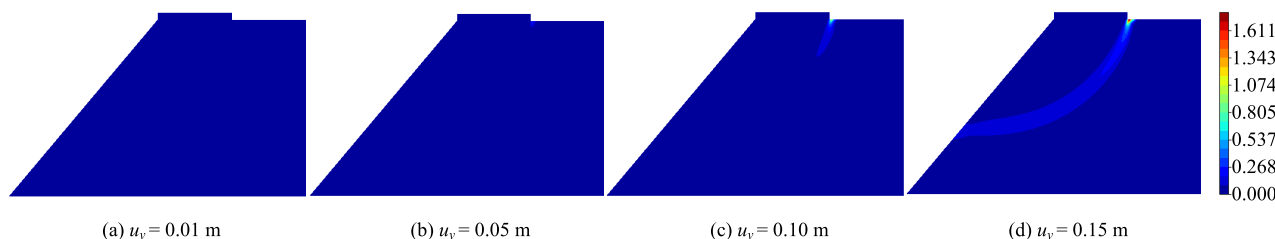


图 12 基于 PCS-FEM 计算获得的不同竖向位移条件下的等效塑性应变

Fig.12 Equivalent plastic strain obtained by PCS-FEM for different vertical displacements

5 结 论

(1) 从应变能的角度推导了平面应变条件下 Cosserat 理论与罚函数偶应力理论之间的关系,若 G_c 是一个由材料性质确定的常数,则指的是 Cosserat 理论;若 G_c 是一个随意变化的大数,用来逼近偶应力的解,则为基于罚函数的偶应力理论,且平面应变条件下的罚因子为 $4G_c$ 。通过弹性圆孔应力集中问题对 PCS-FEM 方法的有效性进行了验证。

(2) 通过对 Ottawa 砂的平面应变试验进行数值分析,研究发现,基于 PCS-FEM 方法计算获得应力-应变曲线及剪切带破坏形态与试验结果基本一致,且可以克服经典连续体理论病态的网格敏感性问题,保证应变局部化问题的适定性,验证了 PCS-FEM 模拟应变局部化问题的可行性。

(3) 通过对承受偏心荷载作用下的土坡应变局部化分析表明,基于传统 FEM 和 PCS-FEM 两种方法获得的破坏形态大致相同。但与传统 FEM 相比,基于 PCS-FEM 方法可以基本克服土坡应变软化阶段的网格敏感性问题,展现土体的渐进破坏过程。

参 考 文 献

- [1] ALSHIBLI K A, STURE S. Shear band formation in plane strain experiments of sand[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2000, 126(6): 495-503.
- [2] 钱建固, 黄茂松. 土体应变局部化现象的理论解析[J]. 岩土力学, 2005, 26(3): 432-436.
QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. An analytical solution for criterion of onset of strain localization of

- soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(3): 432-436.
- [3] 王小平, 徐卫亚. 应变局部化问题中的正则化机制探讨[J]. 岩土力学, 2008, 29(11): 2997-3002.
WANG Xiao-ping, XU Wei-ya. Discussion on regularization mechanism in strain localization problems[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(11): 2997-3002.
- [4] TANG H X, DONG Y, WANG T, et al. Simulation of strain localization with discrete element-Cosserat continuum finite element two scale method for granular materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, 122: 450-471.
- [5] DE BORST R, MÜHLHAUS H B. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 35(3): 521-539.
- [6] CHANG J F, LI S F, WANG W, et al. A study of non-coaxial effects on strain localization via micropolar plasticity model[J]. *Acta Geotechnica*, 2022, 17: 721-739.
- [7] WANG D Y, CHEN X, LYU Y N, et al. Geotechnical localization analysis based on Cosserat continuum theory and second-order cone programming optimized finite element method[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, 114: 103118.
- [8] CHEN X, WANG D Y, TANG J B, et al. Geotechnical stability analysis considering strain softening using micro-polar continuum finite element method[J]. *Journal of Central South University*, 2021, 28(1): 297-310.
- [9] 常江芳. 基于微极理论的岩土材料应变局部化数值研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2016.
CHANG Jiang-fang. Numerical investigation of strain localization of geomaterials based on micropolar theory[D]. Wuhan: Wuhan University, 2016.

- [10] TEJCHMAN J, BAUER E. Numerical simulation of shear band formation with a polar hypoplastic constitutive model[J]. **Computers and Geotechnics**, 1996, 19(3): 221-244.
- [11] GRACIO J J. The double effect of grain size on the work hardening behavior of polycrystalline copper[J]. **Scripta Metallurgica et Materialia**, 1994, 31(4): 487-489.
- [12] TEJCHMAN J, WU W. Numerical study on patterning of shear bands in a Cosserat continuum[J]. **Acta Mechanica**, 1993, 99(1-4): 61-74.
- [13] 马刚, 常晓林, 周伟, 等. 基于 Cosserat 理论的重力坝深层抗滑稳定分析[J]. **岩土力学**, 2012, 33(5): 1505-1512.
MA Gang, CHANG Xiao-lin, ZHOU Wei, et al. Deep anti-sliding stability analysis of gravity dam based on Cosserat continuum theory[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(5): 1505-1512.
- [14] 唐嘉博, 马刚, 涂承义, 等. 基于 Cosserat 理论的三维弹塑性模型及其在重力坝抗滑稳定分析中的应用[J]. **岩石力学与工程学报**, 2021, 40(8): 1702-1712.
TANG Jia-bo, MA Gang, TU Cheng-yi, et al. Three-dimensional elastic-plastic model based on Cosserat theory and its application in anti-sliding stability analysis of gravity dams[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2021, 40(8): 1702-1712.
- [15] 余成学, 罗继铎, 张玉珍. 层状岩体的 Cosserat 介质理论中第二剪切模量 G° 的研究[J]. **岩土力学**, 1996, 17(4): 62-69.
SHE Cheng-xue, LUO Ji-xian, ZHANG Yu-zhen. The research on the second shear modulus G° in Cosserat medium theory of layered rockmass[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1996, 17(4): 62-69.
- [16] MINDLIN R D. Influence of couple-stresses on stress concentrations[J]. **Experimental Mechanics**, 1963, 3(1): 1-7.
- [17] 唐洪祥, 韦文成. 耦合强度各向异性与应变软化的边坡稳定有限元分析[J]. **岩土力学**, 2019, 40(10): 4092-4100.
TANG Hong-xiang, WEI Wei-cheng. Finite element analysis for slope stability coupling strength anisotropy and strain softening[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(10): 4092-4100.
- [18] 马旭. 偶应力/应变梯度理论及其杂交应力元分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2014.
MA Xu. The couple stress/strain gradient theory and its hybrid stress element analysis[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2014.
- [19] GARG N, HAN C S. A penalty finite element approach for couple stress elasticity[J]. **Computational Mechanics**, 2013, 52(3): 709-720.
- [20] SHANG Y, LI C F, JIA K Y. 8-node hexahedral unsymmetric element with rotation degrees of freedom for modified couple stress elasticity[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2020, 121(12): 2683-2700.
- [21] ADACHI T, TOMITA Y, TANAKA M. Computational simulation of deformation behavior of 2D-lattice continuum[J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 1998, 40(9): 857-866.
- [22] 肖其林, 凌中, 吴永礼, 等. 偶应力问题的非协调元分析[J]. **中国科学院研究生院学报**, 2003, 20(2): 223-231.
XIAO Qi-lin, LING Zhong, WU Yong-li, et al. Incompatible finite element analysis of couple-stress problems[J]. **Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences**, 2003, 20(2): 223-231.
- [23] ALSHIBLI K A. Localized deformations in granular materials[D]. Boulder: University of Colorado at Boulder, 1995.
- [24] ARSLAN H, STURE S. Finite element analysis of localization and micro-macro structure relation in granular materials. Part II: implementation and simulations[J]. **Acta Mechanica**, 2008, 197(3): 153-171.
- [25] WANG D Y, CHEN X, QI J L, et al. Assessment on strength reduction schemes for geotechnical stability analysis involving the Drucker-Prager criterion[J]. **Journal of Central South University**, 2021, 28(10): 3238-3245.
- [26] 王鹏鹏, 郭晓霞, 桑勇, 等. 基于数字图像相关技术的砂土全场变形测量及其 DEM 数值模拟[J]. **工程力学**, 2020, 37(1): 239-247.
WANG Peng-peng, GUO Xiao-xia, SANG Yong, et al. Full-field deformation measurement of sand using the digital image correlation technique and numerical simulation using the discrete element method[J]. **Engineering Mechanics**, 2020, 37(1): 239-247.
- [27] CONTE E, SILVESTRI F, TRONCONE A. Stability analysis of slopes in soils with strain-softening behaviour[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(5): 710-722.
- [28] 余村, 楚锡华, 唐洪祥, 等. 基于 Cosserat 连续体的颗粒破碎影响研究[J]. **岩土力学**, 2013, 34(增刊 1): 67-72.
YU Cun, CHU Xi-hua, TANG Hong-xiang, et al. Study of effect of particle breakage based on Cosserat continuum[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(Suppl.1): 67-72.